16-1-16

§3.9.2) Κυματική Εξίσωση

$$(1):\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Θεωρούμε $(2):\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \end{cases}$

Παραδοχή: $V(x,t)=X(x)T(t)$ ③

$\Rightarrow X(x)T''(t)=c^2X''(x)T(t) \xRightarrow{c^2XT\not\equiv 0}$

$\frac{T''(t)}{c^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$ = σταθερά.

$\Rightarrow T''(t)=-\lambda c^2T(t)$, $t\geq 0$ και $\begin{cases} -X''(x)=\lambda X(x), & 0<x<\ell \\ X(0)=X(\ell)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow T''(t)+\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2T(t)=0$, $t>0$

$\Rightarrow T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)$ $\Rightarrow \lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$

Άρα, $V_n(x,t)=\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, $n\in\mathbb{N}$

Είναι όλες οι λύσεις του (2) [υπό την παραδοχή ③]

$\xRightarrow{①} u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, λύνει την ①

αν $u(x,0)=\sum_{n=1}^{N}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)=\varphi(x)$ και

$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\left[-\frac{n\pi c}{\ell}a_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)+\left(\frac{n\pi ct}{\ell}b_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$

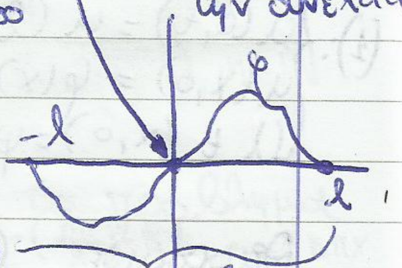
$\Rightarrow u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{N}b_n\frac{n\pi c}{\ell}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)=\psi(x)$

(*) Συνθήκες συμβατότητας: $\varphi(0)=\varphi(\ell)=0=\psi(0)=\psi(\ell)=\varphi''(0)=\varphi''(\ell)$

$\Rightarrow$ $\varphi_{επεκτ}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής 2ℓ-περιοδική, περιττή επέκταση της φ κατά τμήματα C^1, αν φ συνεχής κατά τμήματα C^1.

για να μας δίνει την συνέχεια

Με (*) μπορούμε να βάλουμε $(N=)\infty$



Αν φ είναι C^3 στο $[0,\ell]$, $\varphi\in C^2([0,\ell])$ τότε αποδεικνύεται ότι η $u=\sum\ldots$ είναι λύση του ① συνεχής στο $[0,\ell]\times[0,\infty)$ και τουλάχιστον 2 φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,\ell)\times(0,\infty)$.

$\underline{\text{Π.χ}}$ $u:[0,\pi]\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx} \\ u(\cdot,0)=\varphi \\ u_t(\cdot,0)=\psi \\ u(0,\cdot)=u(\pi,\cdot)=0 \end{cases}$$

$\varphi(x)=2\sin x-3\sin(2x)+4\sin(5x)$

$\psi(x)=3\sin(2x)+\sin(3x)-2\sin(6x)$

<u>Λύση</u>

Θεωρία $\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$

όπου $\begin{cases} a_n = \text{συντελεστές Fourier της } \varphi \Rightarrow a_1=2, a_2=-3, a_5=4 \\ b_n\frac{n\pi c}{l} = \text{'' '' } \psi \Rightarrow \end{cases}$ $a_n=0, \forall n/\{1,2,5\}$

$\overset{\frac{\pi}{l}=1}{\Rightarrow} b_2\cdot 4=3,\ b_3\cdot 6=1,\ b_6\cdot 12=-2$ και $b_n=0, \forall n/\{2,3,6\}$

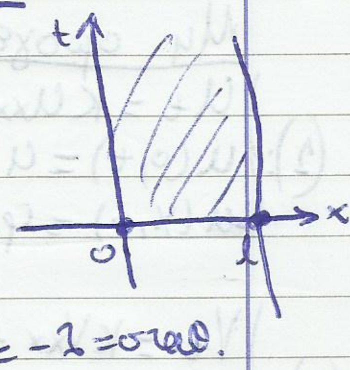
$\Rightarrow u(x,t)=2\cos(2t)\sin x-3\cos(4t)\sin(2x)+4\cos(10t)\sin(5x)$
$+\frac{3}{4}\sin(4t)\sin(2x)+\frac{1}{6}\sin(6t)\sin(3x)-\frac{1}{6}\sin(12t)\sin(6x)$

<u>Συνθήκες Neuman για εξισ. θερμότητας</u>

$u_t=ku_{xx}\quad, 0<x<l,\ k>0,\ t>0$

$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0\ , t>0$

$u(x,0)=\varphi(x)\quad , 0\le x\le l$



1. Θεωρούμε εξίσωση και συνοριακές συνθήκες
2. Παραδοχή: $v(x,t)=X(x)T(t)\Rightarrow$

$X(x)T'(t)=kX''(x)T(t)\xrightarrow{kXT\neq 0}\frac{T'(t)}{kT(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda=\text{σταθ.}$

$\Rightarrow T'(t)=-\lambda k T(t)\Rightarrow T(t)=Ae^{-\lambda kt}\ , t>0$

$-X''(x)=\lambda X(x)$

συνοριακές συνθήκες: $V_x(0,t)=V_x(l,t)\xrightarrow{T(t)\neq 0}\begin{cases} X'(0)=X'(l)=0 \\ -X''(x)=\lambda X(x)\end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{-\int_0^l X''X}_{=-X'(x)X(x)\big|_0^l+\int_0^l (X')^2}=\lambda\int_0^l X^2$ $\Rightarrow \lambda\ge 0$: $\underline{\lambda=0}\Rightarrow X''(x)=0\Rightarrow X(x)=C+Dx$

$\Rightarrow X'(x)=D\Rightarrow D=0\Rightarrow X(x)=C\Rightarrow$ για $\lambda=0$

ιδιοσυνάρτηση $X_0(x)=1$

$=0$

$\underline{\lambda>0} \Rightarrow \lambda = b^2,\ b>0 \Rightarrow X(x) = C\cos(bx) + D\sin(bx)$

$\Rightarrow X'(x) = -Cb\sin(bx) + Db\cos(bx) \xrightarrow{X'(0)=0} Db = 0 \xrightarrow{b>0}$

$D=0$ και $X'(l) = -Cb\sin(bl) = 0 \xrightarrow{Cb\neq 0}$

$\sin(bl) = 0 \Rightarrow bl = n\pi,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

$\Rightarrow X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ n\in\mathbb{N}_0$

$\Rightarrow V_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ n\in\mathbb{N}_0$ λύση της εξίσωσης + συνοριακές, για $t>0$.

3. Θεωρούμε και την αρχική συνθήκη και ισχυριζόμαστε ότι $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\cos\frac{n\pi x}{l}$, λύνει το ΠΑΣΤ, αν $u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x)$

και με συνθήκη συμβατότητας $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$

$\varphi\in C^2([0,l]) \Rightarrow \varphi_{επεκτ}\in C^1(\mathbb{R})$ 2l-περιοδική-άρτια, $C^1 \Rightarrow$

a_n συντελεστές Fourier της φ

Μη ομογενής εξίσωση θερμότητας με συνθήκες Dirichlet

$$(1):\begin{cases} u_t = k u_{xx} + f, & 0<x<l,\ k>0,\ t>0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t\geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

$$(2):\begin{cases} V_t = kV_{xx} + f \\ V(0,t) = V(l,t) = 0 \\ V(x,0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow V$ λύση του (2) και u λύση του (1) με $f\equiv 0$

$\Rightarrow V + u$ λύση του (1)

1. Επεκτείνουμε την f περιττά στο $(-l,0)$ και μετά 2l-περιοδικά στο $\mathbb{R} \Rightarrow$ αυτή έχει (και όχι αναπτύσσεται) σειρά Fourier, δηλαδή $f_{επεκτ}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$

Αν $u_{\varepsilon\pi\varepsilon\kappa}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, $t>0$

και αρκετά ομαλό u, ώστε το $\sim$ να είναι $=$

και να ισχύει $u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ και

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

για να $\Longrightarrow$ ισχύει η εξίσωση του προβλήματος

$$\begin{cases} b_n'(t) - k\,b_n(t)\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\right) = B_n(t) & , \forall t>0, \forall n\in\mathbb{N} \\ b_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow b_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 ks} B_n(s)\,ds$$